CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1991

# MATHÉMATIQUES I

CONCOURS SCIENCES

Options T, TA.

*Durée : 4 heures*

Dans l'appréciation des copies, il sera tenu compte de la rigueur des raisonnements, de la précision de la rédaction, et de la présentation.

Le candidat pourra, à condition de l'indiquer clairement, admettre un résultat afin de traiter les questions suivantes.

Il sera fourni une feuille de papier millimétré à chaque candidat.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

$\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls.

L'objet du problème est de calculer les intégrales :

$$J_p = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^p t}{t^p}\,dt \text{ et } F_p(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^p(tx)}{t^p(1+t^2)}\,dt, \text{ pour } p \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ et } x \in \mathbb{R}_+.$$

## PREMIÈRE PARTIE

*Dans cette partie,* p *est un entier strictement positif quelconque.*

1) Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(0, x) = x, \text{ et, si } t \neq 0, \ h(t, x) = \frac{\sin(tx)}{t},$$

est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

En conséquence, si $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'intégrale (pour $a \in \mathbb{R}_+$) :

$$\int_0^a \frac{\sin^p(tx)}{t^p}\, g(t, x)\,dt = \int_0^a h^p(t, x)\, g(t, x)\,dt$$ est une intégrale simple.

2) *a)* Montrer l'existence de $J_p$, pour $p \geqslant 2$.

*b)* Montrer l'existence de $J_1$ et l'égalité $J_1 = J_2$ (on pourra procéder à une intégration par parties).

3) *a)* Montrer l'existence de $F_p(x)$ pour tout réel $x$ positif ou nul.

*b)* On pose : $F_0(x) = F_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)}$. Donner la valeur de $F_0$.

4) *a)* Montrer que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $|F_1(x) - F_1(y)| \leqslant \frac{\pi}{2} |x - y|$.

En déduire la continuité uniforme de la fonction $F_1$.

*b)* Montrer que, pour $p \geqslant 2$ : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $|F_p(x) - F_p(y)| \leqslant \frac{\pi}{2} |x^p - y^p|$.

En déduire la continuité de la fonction $F_p$.

*c)* La fonction $\Phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\Phi(x) = x^p$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ pour $p \geqslant 2$ ?

T.S.V.P.

5) *a)* Montrer que la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $v_n(x) = \int_n^{+\infty} \frac{\sin^{p-1}(tx)\cos(tx)}{t^{p-1}(1+t^2)}\,dt$

converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

*b)* En déduire que la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $u_n(x) = \int_0^n \frac{\sin^{p-1}(tx)\cos(tx)}{t^{p-1}(1+t^2)}\,dt$

converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une certaine fonction $\psi$.

On définira $\psi(x)$ à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

6) Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \int_0^n \frac{\sin^p(tx)}{t^p(1+t^2)}\,dt$ où $n$ est un entier positif.

*a)* On admet que $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $f'_n(x) = p\int_0^n \frac{\sin^{p-1}(tx)\cos(tx)}{t^{p-1}(1+t^2)}\,dt$.

En déduire que $F_p$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+$ et que :

$$F'_p(x) = p\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{p-1}(tx)\cos(tx)}{t^{p-1}(1+t^2)}\,dt \quad .$$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour $p \geqslant 1$.

*b)* On admet que, pour $p \geqslant 2$, $f_n$ est deux fois dérivable et que :

$$f''_n(x) = p(p-1)\int_0^n \frac{\sin^{p-2}(tx)}{t^{p-2}(1+t^2)}\,dt - p^2\int_0^n \frac{\sin^p(tx)}{t^{p-2}(1+t^2)}\,dt .$$

En déduire, toujours pour $p \geqslant 2$, que $F_p$ est deux fois dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+$ et donner $F''_p(x)$ sous la forme d'une somme d'intégrales généralisées.

7) En déduire que, toujours pour $p \geqslant 2$, $F_p$ vérifie sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle :

$$(E_p) \quad y'' - p^2 y = p(p-1)F_{p-2}(x) - p^2 x^{p-1} J_p \quad \text{(avec } y = F_p\text{)}.$$

## DEUXIÈME PARTIE

1) Intégrer l'équation différentielle : $y'' - 4y = \lambda x + \pi$, où $\lambda$ est un réel donné.

2) Intégrer l'équation différentielle :

$$y'' - 16y = 3\pi e^{-2x} + 6\pi x - 3\pi - \lambda x^3, \text{ où } \lambda \text{ est un réel donné.}$$

3) *a)* Intégrer l'équation $(E_2)$.

*b)* En utilisant les valeurs de $F_2(0)$ et de $F'_2(0)$, calculer $F_2(x)$ en fonction de $J_2$.

*c)* A l'aide de l'inégalité du 4-*b)* de la première partie, donner la valeur de $J_2$, et préciser $F_2(x)$. (On pourra faire tendre $x$ vers $+\infty$).

4) Calculer $F_4(x)$ et $J_4$ en intégrant $(E_4)$ et en utilisant les valeurs de $F_4(0)$, de $F'_4(0)$ et l'inégalité du 4-*b)* de la première partie.

5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'_1(x) = \frac{1}{2}F''_2(\frac{x}{2})$. En déduire $F_1(x)$.

6) Calculer $F_3(x)$ et $J_3$ en intégrant $(E_3)$ et en utilisant les valeurs de $F_3(0)$, de $F'_3(0)$ et l'inégalité du 4-*b)* de la première partie.

**FIN**